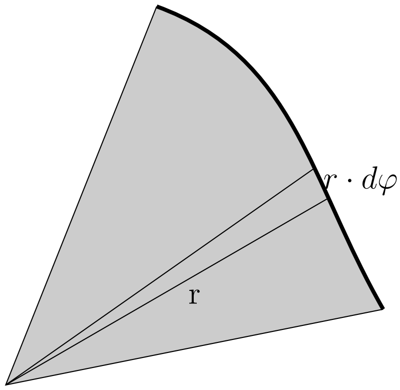
Multiplikation am Kreis

1 Leibnizsche Sektor-Regel



Wenn eine Kurve in Polarkoordinaten als $r(\varphi)$ gegeben ist, kann die Fläche A des Sektors bestimmt werden durch

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r(\varphi) \cdot r(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi$$

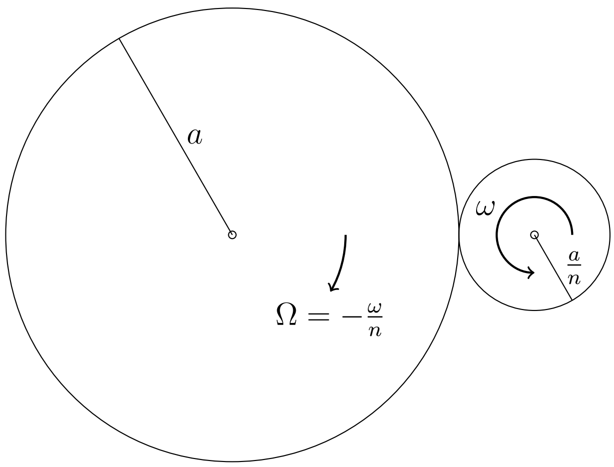
Nun nehmen wir an, dass die Kurve allgemein parametrisiert ist durch $x(t)$ und $y(t)$. Dann gilt

$$r^2 = x^2 + y^2; \qquad \varphi = \arctan \frac{y}{x};$$

$$d\varphi = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2} \cdot dt = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2 + y^2} dt = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{r^2} dt = \frac{\begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix}}{r^2} dt$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} r^2 \frac{\begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix}}{r^2} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix} dt$$

2 Die Epizykloide



Ein kleiner Kreis vom Radius $r = \frac{a}{n}$ dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω und treibt ohne Schlupf einen großen Kreis vom Radius a von außen an. Die Winkelgeschwindigkeit des großen Kreises ist dann $\Omega = -\frac{\omega}{n}$. Wenn wir diesen Vorgang von einem mit der Winkelgeschwindigkeit $-\frac{\omega}{n}$ rotierenden System aus betrachten, steht der große Kreis still, der Mittelpunkt des kleinen Kreises dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{\omega}{n}$ und der kleine Kreis dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega + \frac{\omega}{n} = \frac{n+1}{n}\omega$. Die Bewegung eines festen Punktes auf dem kleinen Kreis wird in diesem Bezugssystem Epizykloide genannt. Die Kurvengleichungen lauten dann

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{n+1}{n} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\omega}{n}t) \\ \sin(\frac{\omega}{n}t) \end{pmatrix} + \frac{a}{n} \begin{pmatrix} \cos(\frac{n+1}{n}\omega t) \\ \sin(\frac{n+1}{n}\omega t) \end{pmatrix}$$

Wenn wir nun $\omega = n$ setzen, erhalten wir

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{n+1}{n}a \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{n}a \begin{pmatrix} \cos((n+1)t) \\ \sin((n+1)t) \end{pmatrix}}$$

Für die Ableitung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{n+1}{n}a \begin{pmatrix} -\sin(t) - \sin((n+1)t) \\ \cos(t) + \cos((n+1)t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}^2 = \left(\frac{n+1}{n}a\right)^2 \left(\sin^2(t) + 2\sin(t)\sin((n+1)t) + \sin^2((n+1)t)\right)$$

$$\dot{y}^2 = \left(\frac{n+1}{n}a\right)^2 \left(\cos^2(t) + 2\cos(t)\cos((n+1)t) + \cos^2((n+1)t)\right)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\frac{n+1}{n}a\right)^2 (2 + 2\cos(nt))$$

$$\cos(nt) = \cos^2(\frac{nt}{2}) - \sin^2(\frac{nt}{2}) = \cos^2(\frac{nt}{2}) - 1 + \cos^2(\frac{nt}{2}) = 2\cos^2(\frac{nt}{2}) - 1$$

$$\cos(nt) + 1 = 2\cos^2(\frac{nt}{2}) \Rightarrow 2\cos(nt) + 2 = 4\cos^2\left(\frac{nt}{2}\right)^2$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = 2\frac{n+1}{n}a\cos\left(\frac{nt}{2}\right)$$

$$\frac{u}{n} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = 2\frac{n+1}{n}a\left[-\frac{2}{n}\sin(\frac{nt}{2})\right]_{+\frac{\pi}{n}}^{-\frac{\pi}{n}} = \frac{8(n+1)}{n^2}a$$

Damit gilt für den Umfang einer Epizykloide

$$\boxed{u = \frac{8(n+1)}{n}a}$$

Wir wenden uns nun der Fläche zu

$$\dot{y}x = \frac{n+1}{n^2}a^2\left((n+1)\cos^2(t) + (n+2)\cos(t)\cos((n+1)t) + \cos^2((n+1)t)\right)$$

$$y\dot{x} = \frac{n+1}{n^2}a^2\left(-(n+1)\sin^2(t) - (n+2)\sin(t)\sin((n+1)t) - \sin^2((n+1)t)\right)$$

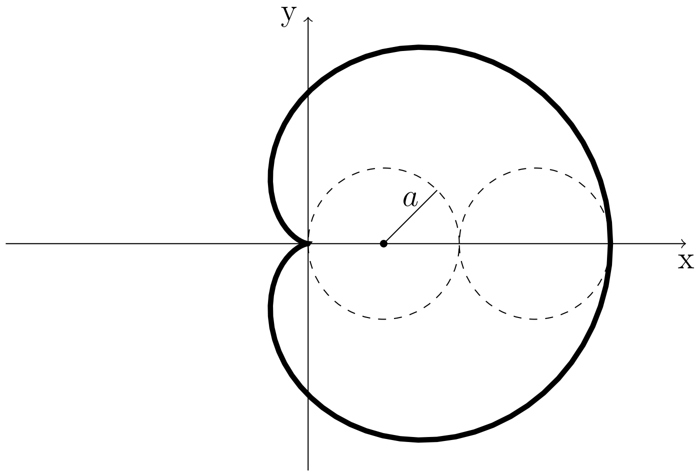
$$\dot{y}x - y\dot{x} = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2}a^2(1 + \cos(nt))$$

Für die Fläche erhalten wir nun

$$A = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\dot{y}x - y\dot{x})dt = \frac{1}{2}\frac{(n+1)(n+2)}{n^2}a^2 \cdot 2\pi = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2}\pi a^2$$

$$\boxed{A = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2}\pi a^2}$$

3 Die Kardioide



Die Kardioide entsteht indem ein Kreis um einen gleichgroßen festen Kreis vom Radius a abrollt. Wir verschieben den festen Kreis um a nach rechts. Damit erhalten die folgende Epizykloiden-Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{1} a \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{1} a \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Wir versuchen nun den Koordinaten eine gefälligere Form zu geben.

$$x = 2a\cos(t) + a(1\cos(2t)) = 2a\cos(t) + 2a\cos^2(t) = 2a(1 + \cos(t))\cos(t)$$

$$y = 2a\sin(t) + a\sin(2t) = 2a\sin(t) + 2a\sin(t)\cos(t) = 2a(1 + \cos(t))\sin(t)$$

Dieser Darstellung können wir nun sofort die Polarkoordinaten-Darstellung der Kardioide entnehmen. Es gilt

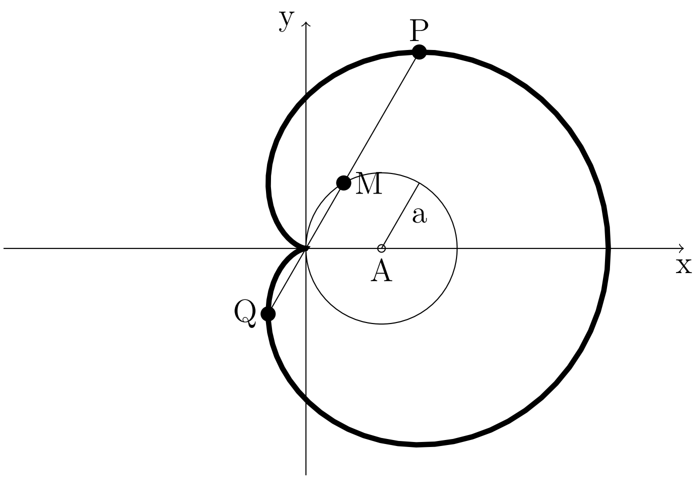
$$\boxed{r(t) = 2a(1 + \cos(t)) = 4a\cos^2(\frac{t}{2})}$$

Für den Umfang gilt dann

$$u = \frac{8 \cdot 2}{1} a = 16a$$

und für die Fläche

$$A = \frac{2 \cdot 3}{1^2} \pi a^2 = 6\pi a^2$$



Wir legen durch die Spitze (Ursprung) eine Gerade, welche die Kardioide in den Punkten P und Q trifft. Wegen

$$r(t) = 2a(1+\cos(t)); \quad r(t+\pi) = 2a(1-\cos(t)); \quad \Rightarrow \quad r(t) + r(t+\pi) = 4a$$

Alle Strecken $\overline{PQ} = 4a$ haben also dieselbe Länge! Nun berechnen wir die Mittelpunkte der Strecken $[PQ]$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + 2a \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t+\pi) \\ y(t+\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + 2a \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Für den Mittelpunkt gilt dann

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Damit haben alle Mittelpunkte vom Punkt A(a,0) alle denselben Abstand a. Damit liegen die Mittelpunkte auf einem Kreis!

Wir können noch die zweite Parametrisierung untersuchen

$$\boxed{\vec{x}(t) = 4a\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}}$$

Wir berechnen die Ableitung

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= -4a\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + 4a\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \\ &= 4a\cos\left(\frac{t}{2}\right)\begin{pmatrix} -\sin\frac{t}{2}\cos t - \cos\frac{t}{2}\sin t \\ -\sin\frac{t}{2}\sin t + \cos\frac{t}{2}\cos t \end{pmatrix} = 4a\cos\frac{t}{2}\begin{pmatrix} -\sin\frac{3t}{2} \\ \cos\frac{3t}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für den Normalen-Einheitsvektor

$$\boxed{\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{3t}{2} \\ \sin\frac{3t}{2} \end{pmatrix}}$$

Nun bestimmen wir die Hesse-Normalen-Form der Tangente an der Kardioide

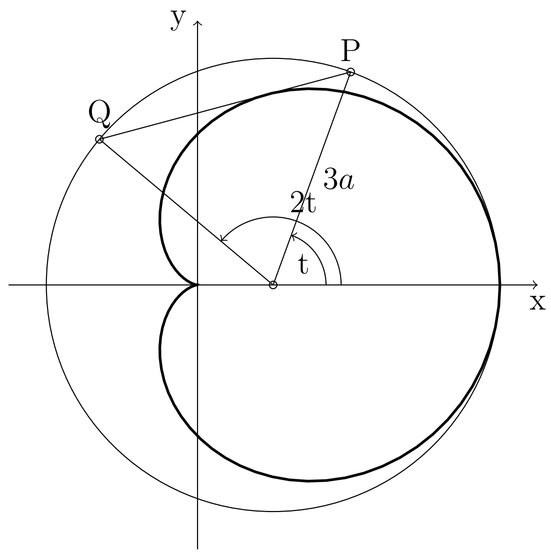
$$\vec{n}(t) \circ (\vec{x} - \vec{x}(t)) = 0$$

Jetzt berechnen wir das Skalarprodukt $\vec{n}(t) \circ \vec{x}(t)$.

$$\vec{n}(t) \circ \vec{x}(t) = 4a\cos^2\frac{t}{2}\left(\cos\frac{3t}{2}\cos t + \sin\frac{3t}{2}\sin t\right) = 4a\cos^3\frac{t}{2}$$

Dadurch erhalten wir die Tangenten-Gleichung an der Kardoide als

$$\boxed{\cos\frac{3t}{2}x + \sin\frac{3t}{2}y = 4a\cos^3\frac{t}{2}}$$



Auf einem Kreis vom Radius $3a$ läuft ein Punkt P mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 1$ und ein Punkt Q mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = 2$ um. Wir betrachten nun die verbindende Sehne $\overline{PQ}$.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + 3a \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + 3a \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \cos(2t) - \cos(t) \\ \sin(2t) - \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2} \\ 2\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix} = 2\sin\frac{t}{2} \begin{pmatrix} -\sin\frac{3t}{2} \\ \cos\frac{3t}{2} \end{pmatrix}$$

ist die Richtung der Sehne. Damit erhalten wir die Normale

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} \cos\frac{3t}{2} \\ \sin\frac{3t}{2} \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Sehne hat die Form

$$\cos\frac{3t}{2} \cdot x + \sin\frac{3t}{2} \cdot y = c$$

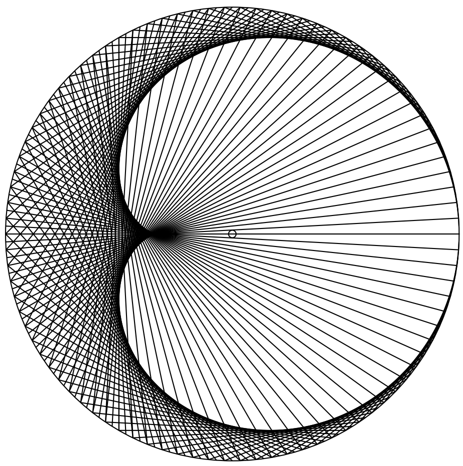
Der Punkt P liegt auf dieser Sehne und dadurch gilt

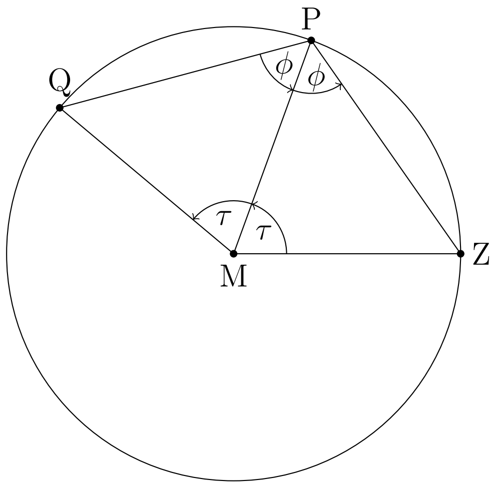
$$\begin{aligned} c &= \cos\frac{3t}{2}\,(a + 3a\cos(t)) + 3a\sin\frac{3t}{2}\sin(t) = \\ &= a\cos\frac{3t}{2} + 3a\left(\cos\frac{3t}{2}\cos(t) + \sin\frac{3t}{2}\sin(t)\right) = \\ &= a\left(-3\cos\frac{t}{2} + 4\cos^3\frac{t}{2}\right) + 3a\cos\frac{t}{2} = 4a\cos^3\frac{t}{2} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Sehne

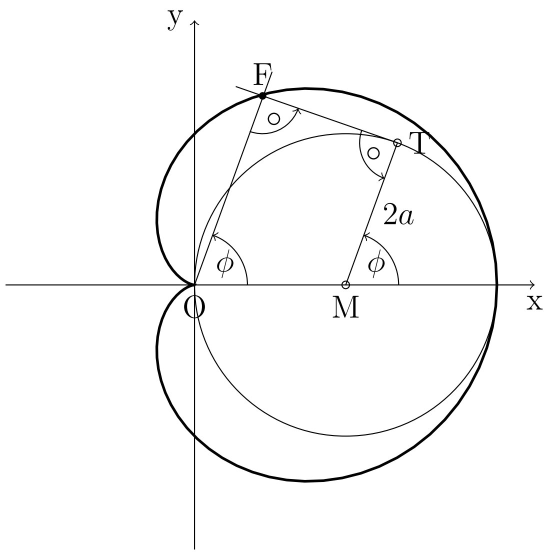
$$\boxed{\cos\frac{3t}{2}x + \sin\frac{3t}{2}y = 4a\cos^3\frac{t}{2}}$$

Dies ist aber genau die Gleichung der Tangente an der Kardioide. Man nennt diese Erzeugung die Cremona-Erzeugung. Ein Punkt P des Kreises mit dem Richtungswinkel t wird mit einem Punkt des Kreises mit Richtungswinkel $2t$ verbunden!





Vom Punkt Z gehen Lichtstrahlen aus. Der Lichtstrahl trifft auf den Kreispunkt P und wird dort reflektiert und trifft auf Punkt Q. Die Mittelpunktswinkel $\tau = 180° - 2\phi$ sind dadurch gleich groß. Damit ist PQ Tangente einer Kardioide. Damit ist die Kardioide eine Kaustik.



Es wird um $(2a, 0)$ ein Kreis vom Radius $2a$ gezogen. Weiterhin ziehen wir einen Radius mit Richtungswinkel ϕ mit Endpunkt T und zeichnen die Tangente. Diese trifft den Strahl von O zum Richtungswinkel ϕ im Fußpunkt F. Die Gleichung der Tangente lautet

$$\cos(\phi) \cdot (x - 2a) + \sin(\phi) \cdot y = 2a$$

Der Fußpunkt F hat dann die Gleichung

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Diesen setzen wir in die Tangenten-Gleichung ein und erhalten

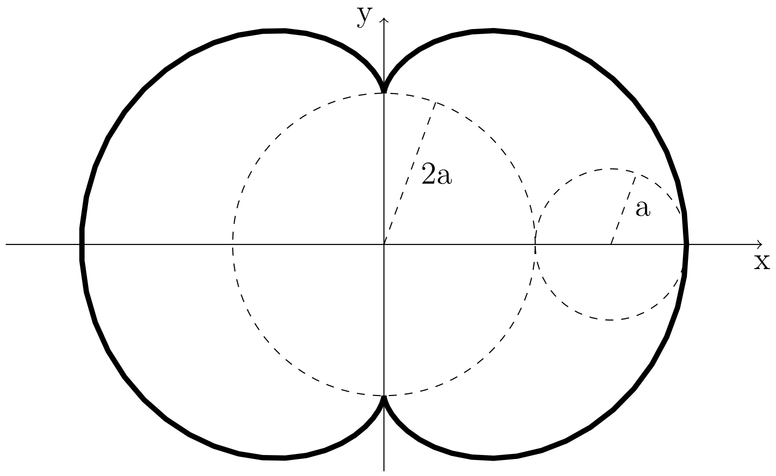
$$2a = \cos(\phi) \cdot (r\cos(\phi) - 2a) + \sin(\phi) \cdot r\sin(\phi) = r\cos^2(\phi) - 2a\cos(\phi) + r\sin^2(\phi) = r - 2a\cos(\phi)$$

Umstellen liefert sofort

$$r = 2a(1 + \cos(\phi)$$

Also bewegt sich der Fußpunkt auf einer Kardioide.

4 Die Nephroide



Ein kleiner Kreis vom Radius a rollt auf einem großen Kreis vom Radius $2a$ ab. Dadurch gilt für diese Epizykloide

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2+1}{2} 2a \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} 2a \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} = 3a \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}}$$

Wir können die Komponenten noch etwas anders schreiben

$$x = 3a\cos(t) + a\left(-3\cos(t) + 4\cos^3(t)\right) = 4a\cos^3(t)$$

$$y = 3a\sin(t) + a\left(3\sin(t) - 4\sin^3(t)\right) = 6a\sin(t) - 4\sin^3(t)$$

Damit haben wir eine zweite Darstellung gefunden

$$\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 4a\cos^3(t) \\ 6a\sin(t) - 4\sin^3(t) \end{pmatrix}}$$

Für den Umfang gilt

$$u = \frac{8(2+1)}{2} 2a = 24a$$

und für die Fläche

$$A = \frac{(2+1)(2+2)}{2^2} \pi (2a)^2 = 12\pi a^2$$

Wir wenden uns nun der Tangente an der Nephroide zu

$$x = 3a\cos(t) + a\cos(3t) \Rightarrow \dot{x} = -3a(\sin(t) + \sin(3t) = -6a\sin(2t)\cos(t)$$

$$y = 3a\sin(t) + a\sin(3t) \Rightarrow \dot{y} = +3a(\cos(t) + \cos(3t) = +6a\cos(2t)\cos(t)$$

Wir erhalten dadurch

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = 6a\cos(t) \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Als Normalenvektor ergibt sich

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Die Tangente wird also durch eine Gleichung der Form

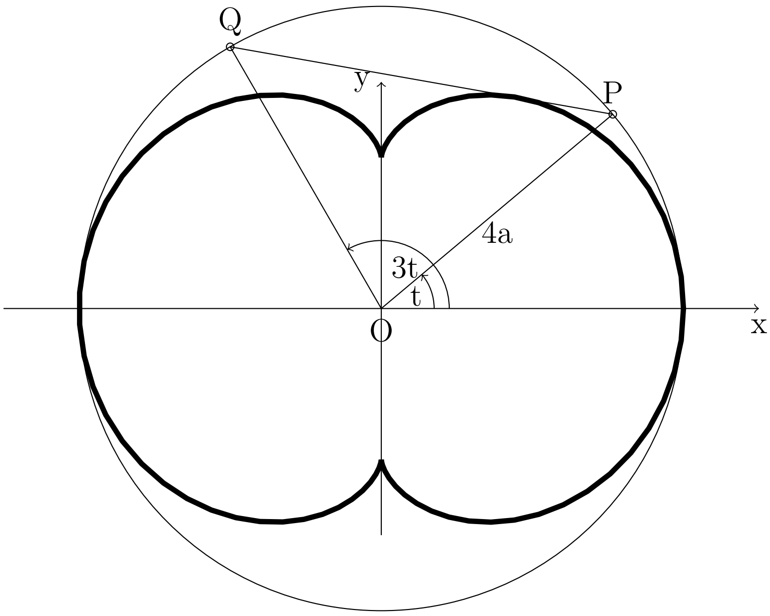
$$\cos(2t) \cdot x + \sin(2t) \cdot y = c$$

beschrieben. Um die Konstante c zu gewinnen, setzen wir den Kurvenpunkt ein

$$\begin{aligned} c &= \cos(2t)(3a\cos(t) + a\cos(3t)) + \sin(2t)(3a\sin(t) + a\sin(3t)) = \\ &= 3a(\cos(2t)\cos(t) + \sin(2t)\sin(t)) + a(\cos(2t)\cos(3t) + \sin(2t)\sin(3t)) = \\ &= 3a\cos(t) + a\cos(t) = 4a\cos(t) \end{aligned}$$

Damit lautet die Tangentengleichung

$$\boxed{\cos(2t)\cdot x + \sin(2t)\cdot y = 4a\cos(t)}$$



Auf einem Kreis vom Radius $4a$ läuft ein Punkt P mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 1$ und ein Punkt Q mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = 3$ um. Wir betrachten nun die Verbindungs-Sehne [PQ]. Für die beiden Punkte P und Q gelten die Gleichungen

$$\vec{p} = 4a\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}; \qquad \vec{q} = 4a\begin{pmatrix}\cos(3t)\\ \sin(3t)\end{pmatrix};$$

Die verbindende Sekante hat dann den Richtungsvektor

$$\vec{s} = \begin{pmatrix}\cos(3t) - \cos(t)\\ \sin(3t) - \sin(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\sin(2t)\sin(t)\\ 2\cos(2t)\sin(t)\end{pmatrix} = 2\sin(t)\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix}$$

Für den Normalenvektor der Sekante gilt damit

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}$$

Damit lautet die Sekanten-Gleichung

$$\cos(2t)\cdot x + \sin(2t)\cdot y = \tilde{c}$$

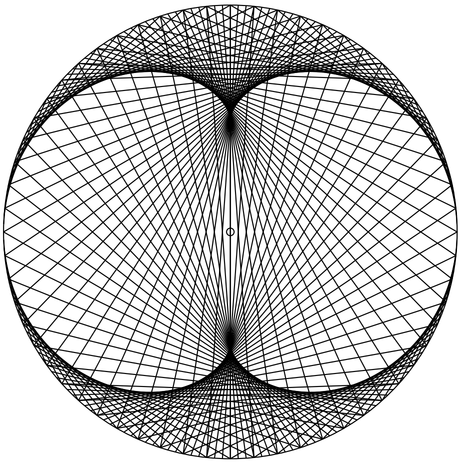
Um $\tilde{c}$ zu ermitteln setzen wir den Punkt $\vec{p} = 4a\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$ in diese Gleichung ein und erhalten

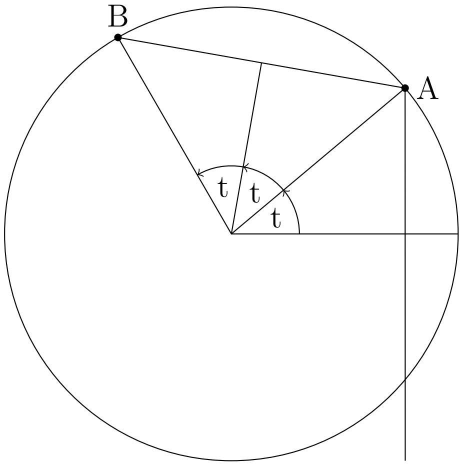
$$\begin{aligned} \tilde{c} &= \cos(2t)4a\cos(t) + \sin(2t)4a\sin(t) = \\ &= 4a(\cos(2t)\cos(t) + \sin(2t)\sin(t)) = \\ &= 4a\cos(t) \end{aligned}$$

Damit wird die Sekante durch die Gleichung

$$\boxed{\cos(2t) \cdot x + \sin(2t) \cdot y = 4a\cos(t)}$$

beschrieben. Die Sekanten sind also genau die Tangenten der Nephroide.





Parallele Lichtstrahlen treffen in positiver y-Richtung auf einen Kreisspiegel. Ein Lichtstrahl trifft in A mit Richtungswinkel t auf den Kreisspiegel und wird reflektiert, um bei B ein zweites Mal auf den Spiegel zu treffen. Man entnimmt der Zeichnung sofort, dass zu B der Richtungswinkel $3t$ gehört. Damit wird ersichtlich, dass die Kaustik des Kreisspiegels eine Nephroide ist. Wir erhalten also die Kaustik, indem wir den Punkt A mit Richtungswinkel t mit einem Punkt mit Richtungswinkel $3t$ verbinden.

5 Einmaleins am Kreis

Wir zeichnen einen Kreis und verbinden immer einen Kreispunkt mit Richtungswinkel t mit einem Kreispunkt mit Richtungswinkel $m \cdot t$ wobei $m \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir für jedes $m \in \mathbb{R}$ eine Schar von Geraden. Die Kaustik dieser Geraden-Schar ist für $m = 2$ die Kardioide und für $m = 3$ die Nephroide. Das Bild zeigt $m = 4$ und $m = 29$.